

楕円函数濫觴

—非線形振り子の運動そして Poncelet の閉形定理へ—¹

野原勉 有本彰雄
知識工学部 情報科学科

1 はじめに

「特殊函数 (岩波 数学公式 3)」の中でも楕円函数の占める部分は大きい。楕円函数自体は C.G.J.Jacobi により 19 世紀半ばには完成されたもの (E.T.Whittaker and G.N.Watson, 1902) であるが, 近年その応用が見直されつつある。著者らはその解が Jacobi の楕円函数で表すことができる Duffing 方程式 (非線形のパネ・マス系の運動を表したもの。Duffing, 1918; 野原・有本, 2010; B.T.Nohara and A.Arimoto, 2011) を扱ってきたが, 最近になり Poncelet の閉形定理 (J.V.Poncelet, 1822) も楕円函数を使い証明できるのではと期待を抱いている。このように楕円函数の応用範囲は広く, 特に理工学における非線形問題に対しその重要性が最近ますます認識されるようになってきた。

楕円函数は非線形の加法定理をもつが, その複雑さや記号の多様性などのためその微分など種々の公式にミスプリントが散見されるのも事実である。本稿の目的は, 非線形振り子の運動の解を求める問題を楕円函数の基本として扱い, この振り子の運動が Poncelet の閉形定理へと繋がっていることを示し, 閉形定理を解析的に証明することである。

この稿の構成は, まず, 第 2 章にて非線形振り子の運動方程式からその解を求める。その過程は Greenhill(A.G.Greenhill, 1892) に倣うが, 現代的にアレンジして解の構成を行う。また, 工学的見地より, 非線形振り子の運動を大局的に把握するために, 力学系の道具として位相図や U-tube(S.H.Strogatz, 1994) を駆使してその運動を記述する。第 3 章にて, 議論を Poncelet の閉形定理へと展開する。非線形振り子の運動が Poncelet の閉形定理と密接に繋がっていることを述べ, 閉形定理の基本となる三角形と四角形の場合を楕円函数を使い証明する。

なお, 楕円函数を熟知している読者には全稿を通じて多少冗長的な表現のあるところもあるが, 歴史的な背景も含めて楕円函数の濫觴を考察しているのでその点お許し願いたい。

2 非線形振り子

2.1 自由粒子としての運動の大局的把握

非線形振り子の運動方程式は力のつり合いより簡単に導出できる (W.D.MacMillan, 1927)。図 1 に示すように, 質量 m の振り子の鉛直方向からの振れ角を θ , 振り子の長さを l , 重力加速度を g , 時間を t で表す。 $\theta = \theta(t)$ は微分可能な実数値函数とする。このとき運動方程式は, 初期時刻を t_0 として

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \quad t \geq t_0 \quad (1)$$

¹AMS Subject Classification. 33E05,51N15.

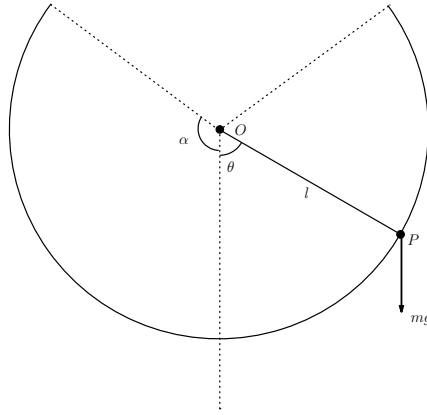


図 1: 非線形振り子: 質量 m , 振り子の長さ l , 鉛直方向からの振れ角 θ (時計の回転と反対方向を正の向きにとる。), 重力加速度 g . 初期条件を $\theta(0) = \alpha (0 < \alpha < \pi)$, $\dot{\theta}(0) = 0$ としたときの時間発展を示す。

と表せられる。ここで, $\dot{\cdot} = \frac{d}{dt}$ である。

さて, 式 (1) の解を求める前に, この運動方程式の意味するところをポテンシャル場と相図 (phase portrait) を使い大局的に見ることにしよう。大局的に見るとは, 解の詳細 (解の具体的な形) は分からなくてもおおよそその解の動きを把握することである。工学的には, この感覚が極めて重要である。

今, 時間 t に依存する 1 次元座標 $y(t)$ のポテンシャル場における運動を考えよう (K.T.Alligood, T.D.Sauer, and J.A.Yorke, 1997)。減衰と外力が存在しないポテンシャル場における運動は, 一般に

$$\ddot{y} + \frac{dP}{dy} = 0 \quad (2)$$

で表せられる。ここに, $P(y)$ はポテンシャル関数で, $P(y) \geq 0$, $P(0) = 0$ とする。

定義 1 単位質量当たりのエネルギー関数 E_U を次で定義する。

$$E_U(y, \dot{y}) := \frac{1}{2} \dot{y}^2 + P(y) \quad (3)$$

命題 1 エネルギー関数 E_U は, すべての時間 t に対して式 (2) の解のなす軌道

$\mathbf{F}(t, (y_0, \dot{y}_0))$ 上で一定である。ただし, $y_0 = y(t_0)$, $\dot{y}_0 = \dot{y}(t_0)$. すなわち,

$$\frac{dE_U}{dt}(\mathbf{F}(t, (y_0, \dot{y}_0))) = 0. \quad (4)$$

[証明] 解を $(y(t), \dot{y}(t))$ と書くと

$$\frac{d}{dt} E_U(y(t), \dot{y}(t)) = \frac{\partial E_U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial E_U}{\partial \dot{y}} \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{dP}{dy} \dot{y} + \dot{y} \left(-\frac{dP}{dy} \right) = 0$$

[証明終]

命題 1 より容易に次の系が導かれる。

系 1 初期時刻 t_0 に対して, $E_U(y(t_0), \dot{y}(t_0)) = C$ とすると, 任意の時刻 t に対して, $E_U(y(t), \dot{y}(t)) = C$ が成り立つ。

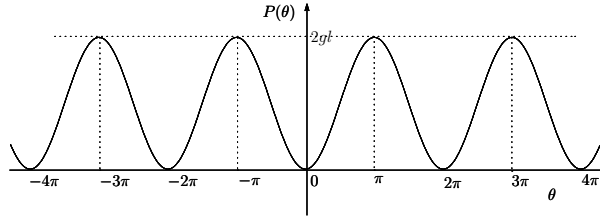


図 2: 振り子のポテンシャル図: $\tilde{P}(\theta) = gl(1 - \cos \theta)$

さて, 振り子の運動に戻り, $y(t) = l\theta(t)$ と置き, $\tilde{P}(\theta(t)) = P(l\theta(t))$ とする。式 (2) に $y(t) = l\theta(t)$ を代入して式 (1) と比べると

$$\frac{d\tilde{P}(\theta)}{d\theta} = gl \sin \theta \quad (5)$$

となる。これよりポテンシャル函数 $\tilde{P}(\theta)$ は

$$\tilde{P}(\theta) = -gl \cos \theta + c, \quad c: \text{constant} \quad (6)$$

となるが, $\tilde{P}(0) = 0$ より $c = gl$ と求めることができ, 結局, 振り子のポテンシャル函数 $\tilde{P}(\theta)$ は次のように書くことができる (図 2)。

$$\tilde{P}(\theta) = gl(1 - \cos \theta) \quad (7)$$

このポテンシャル図より振り子の運動をポテンシャル場の中の自由粒子 (減衰と外力がない状態) としての運動とみるとつぎの 3 種類があることが分かる。

1. ポテンシャルの谷 ($\theta = \pm 2n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$) に粒子がある場合: 図 3 に示すように, ポテンシャルの谷 ($\theta = \pm 2n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$) に粒子があるときには粒子は動かない (振り子は静止状態である)。この場合は '安定' 静止状態である。
2. ポテンシャルの山 ($\theta = \pm(2n+1)\pi, n = 0, 1, 2, \dots$) に粒子がある場合: 図 4 に示すように, ポテンシャルの山 ($\theta = \pm(2n+1)\pi, n = 0, 1, 2, \dots$) に粒子があるときには粒子は動かない (振り子は静止状態である)。この場合, 山の頂上から少しでもずれると, ずれた方のポテンシャルの谷へ落ちてしまう。したがって, この場合は '不安定' 静止状態である。
3. ポテンシャルの山と山の間 ($\theta \in (\pm(2n+1)\pi, \pm(2n+3)\pi), n = 0, 1, 2, \dots$) に粒子がある場合: 図 5 に示すように, この場合は粒子はそのポテンシャルの間で秤動 (librations) 運動をする。

つぎに, 位相図 (phase portrait) を用いて振り子の運動を見てみよう。式 (1) の固定点は簡単な計算より $n = 0, 1, 2, \dots$ として $(\theta, \dot{\theta}) = (\pm 2n\pi, 0)$ と $(\theta, \dot{\theta}) = (\pm(2n+1)\pi, 0)$ を得る。固定点 $(\pm 2n\pi, 0)$ の Jacobi 行列の固有値は純虚数となり, したがって, この固定点は線形 center である。しかし, 式 (1) は時間に可逆であるので非線形システムそのもので見ても center (非線形 center) となる。また, 固定点 $(\pm(2n+1)\pi, 0)$ の Jacobi 行列の固有値は双曲型であるので, Hartman-Grobman 定理により saddle になることが分かる。したがって, 図 6 に示すような位相図を得ることができる。ただし, 曲線の形状は模式的に示している。 $(\theta, \dot{\theta}) = ((2m+1)\pi, 0)$ から $(\theta, \dot{\theta}) = ((2m+3)\pi, 0), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

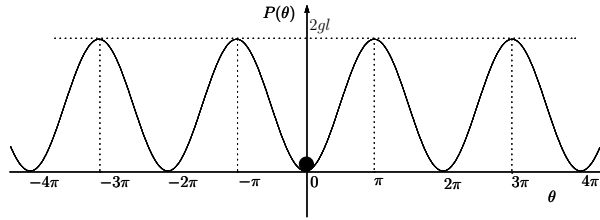


図 3: ポテンシャルの谷 ($\theta = \pm 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$) に粒子がある場合: ‘安定’ 静止状態で粒子は動かない。

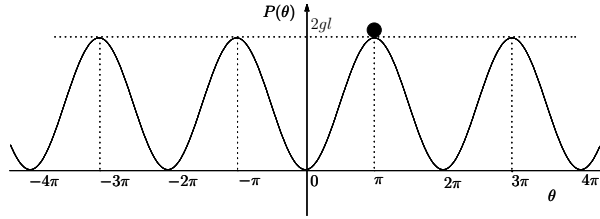


図 4: ポテンシャルの山 ($\theta = \pm(2n+1)\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$) に粒子がある場合: ‘不安定’ 静止状態で粒子は動かない。

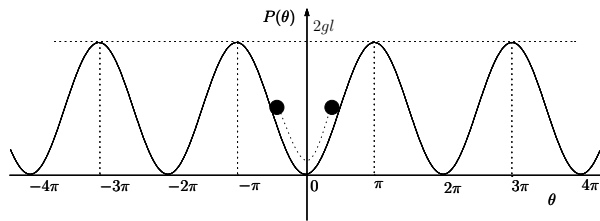


図 5: ポテンシャルの山と山の間 ($\theta \in (\pm(2n+1)\pi, \pm(2n+3)\pi)$, $n = 0, 1, 2, \dots$) に粒子がある場合: 粒子はそのポテンシャルの間で秤動運動をする。

の軌跡がヘテロクリニック軌道 (H_n^+, H_n^-), その内側が有限振れ角を持つ秤動² (librations) を表す軌道 (C_n), 外側が回転³ (rotations) を表す軌道 (R_+, R_-) を示している。ポテンシャル図との対比をすると, center がポテンシャルの谷, saddle がポテンシャルの山, C_n の秤動運動が図 5 に対応する。ポテンシャル図は, 自由粒子の運動を表しているのでヘテロクリニック軌道や回転運動は表すことはできない。

また, 図 7 は図 6 において, θ を $-\pi$ から π の部分を取り出してシリンダー状にし, さらに, エネルギーレベル $E = 0$ で折り曲げた U-tube (S.H.Strogatz, 1994) とされるものである。この U-tube では C_n, R_+, R_- などの周期運動がよく表現されるが, H_n^+, H_n^- などのヘテロクリニック軌道が見掛け上ホモクリニック軌道に変化してしまうのに注意を要する。

² 月が地球中心に常に同じ方向を向けているのではなく, 少しだけ横方向を向くようにふらついていることを秤動 (librations) と呼ぶ。

³ 回転 (rotations) は振り子がぐるぐる回ることをいい, 秤動と区別する。

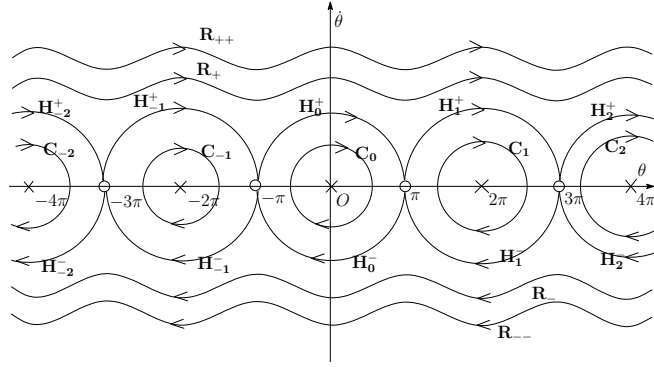


図 6: 非線形振り子の位相図 (模式図): center を \times , saddle を \circ で表している。 C_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) は振り子の振れ角が $-\pi < \theta(\text{mod } 2\pi) < \pi$ となる秤動運動を表す周期解, H_n^+ は振れ角 $\theta(\text{mod } 2\pi)$ が $-\pi$ から π (反時計回り) へと移動するヘテロクリニック軌道, H_n^- は π から $-\pi$ (時計回り) へと移動するヘテロクリニック軌道, R_+ は反時計回りの回転運動, R_- は時計回りの回転運動をそれぞれ表している。また, R_{++}, R_{--} はそれぞれ R_+, R_- より速度が速い回転運動を表している。

2.2 定理

前節で振り子の大局的な運動の把握はできたが, より詳しく式 (1) の解の構造を求めることにする。まず, 結論を定理の形で示す。

定理 1 非線形振り子式 (1) の解は自明解 $\theta(t) = 0$ を除いて以下ようになる。

(1) 初期時刻 t_0 を任意定数として一般解はつぎの 3 種類がある。

(1-1) 秤動運動解

$$\theta(t) = 2 \sin^{-1} \left(\pm k \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0), k \right) \right). \quad (8)$$

ここで, $k = \sin(\alpha/2)$ であり α は秤動運動の最大秤動角で $-\pi < \alpha(\text{mod } 2\pi) < \pi$ である。

(1-2) 回転運動解

$$\theta(t) = 2 \sin^{-1} \left(\pm \frac{1}{k_b} \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0), k_b \right) \right). \quad (9)$$

ここで, $k_b = \sqrt{\frac{2mgl}{E}}$ であり, $E > 2mgl$ である。

(1-3) ヘテロクリニック解

$$\theta(t) = 2 \sin^{-1} \left(\pm \tanh \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0) \right). \quad (10)$$

(2) 特異解としてつぎの 2 種類がある。

(2-1) 安定静止解

$$\theta(t) = 2m\pi, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11)$$

(2-2) 不安定静止解

$$\theta(t) = (2n + 1)\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (12)$$

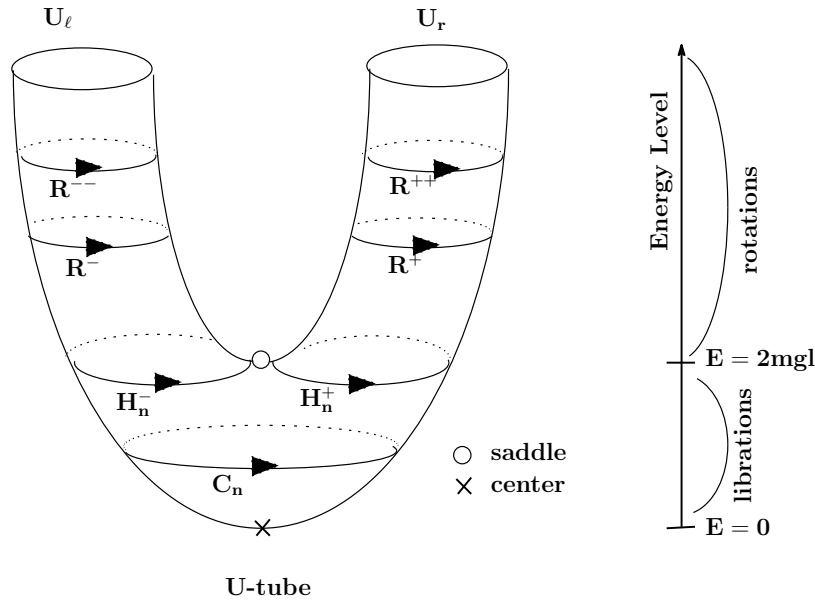


図 7: U-tube:位相図をシリンダー位相図にしてからエネルギーレベル $E = 0$ のところで折り曲げたもの。

2.3 定理 1 の証明

式 (1) の両辺に $\dot{\theta}$ をかけて積分すると

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} \cos \theta + c, \quad c: \text{constant} \quad (13)$$

となる。 c は数学的には積分定数であるが、物理的につぎのように求めることができる。振り子の持つ全エネルギー E は、前節で求めた単位質量当たりのエネルギー函数 E_U に振り子の持つ質量をかけたものであるから

$$\begin{aligned} E(\theta, \dot{\theta}) &= mE_U = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + m\tilde{P}(\theta) = \\ &= \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgl(1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (14)$$

である。上式を書き直すと

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} (\cos \theta - 1) + \frac{2}{ml^2} E \quad (15)$$

式 (13) と式 (15) より

$$c = \frac{2}{ml^2} E - \frac{2g}{l}$$

となり、結局、式 (13) はつぎのように表すことができる。

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} \cos \theta + \frac{2}{ml^2} E - \frac{2g}{l} \quad (16)$$

式 (16) は、運動の第一積分 (the first integral of motion) であり、物理的には振り子のエネルギー保存則を表したものになる。

以上で振り子の解析解を求める準備が整った。ここで、式 (16) を解くにあたり、エネルギー E で (1) $E = 0$, (2) $0 < E < 2mgl$, (3) $E = 2mgl$, (4) $E > 2mgl$ のように場合分けをしよう。

注意 1 振り子の場合、 $E < 0$ は物理的に存在しない。

2.3.1 $E = 0$ の場合

式 (16) に $E = 0$ を代入し、関係式 $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2(\theta/2)$ を使うと

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{4g}{l} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (17)$$

となり、振り子の問題の前提である $\theta \in \mathcal{R}$ より、上式の解は

$$(\theta, \dot{\theta}) = (\pm 2n\pi, 0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

しかないことが分かる。ここで、 $n = 0$ の場合は自明解であるが、そのほかの n のときの解は下記で求める一般解の任意定数を如何に選ぼうとも得ることができないので、これらは立派な特異解である。

注意 2 $E = 0$ の場合は、方程式を解くまでもなく安定静止点（鉛直下方にあり、位相図の *center*、ポテンシャルの谷に相当）しかないことは明らかであり、この事実を数学的に確かめたことになる。

2.3.2 $0 < E < 2mgl$ の場合

$0 < E < 2mgl$ の場合とは、振り子の初期位置が安定静止位置である下方鉛直 $2n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) から $(2n + 1)\pi$ 未満の範囲のことである。（この角度がちょうど $(2n + 1)\pi$ のとき、 $E = 2mgl$ である。）あるいは、下方鉛直にある振り子にエネルギーを与えるのであるが、その振れ角の絶対値が π 未満となるエネルギーである。最大振れ角を α ($-\pi < \alpha \pmod{2\pi} < \pi$) とすると、 $E = mgl(1 - \cos \alpha)$ となり、これを式 (16) に代入すると

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \alpha) \quad (19)$$

を得る。倍角の公式を使い

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{l} \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (20)$$

と変形しよう。

以後、図 8 に基づき Greenhill の幾何的考察を現代風にアレンジして話を進める。Greenhill のオリジナルな解法については後述する。図 8 は、点 P にある振り子が点 O を中心に最大振れ角が α の秤動運動をしている幾何図形である。最大振れ角が α のため、振り子は円の一部分である円弧 B'AB の範囲を秤動している。円 O の最下点 A と最大振れ角が形成する円 O の弦 B'B と点 D で接する直径 AD を持つ円を内部に描くことができる。さて、点 P から円 O の直径 AE に垂線を下ろした点を N、直径 AD の円と交わる点を Q として、点 P の動きを点 Q に移して考える。すると、もともとの振り子の点 P の秤動角 θ は $0 \leq |\theta| \leq \alpha$ であるが、点 Q の秤動角 $\varphi (= \angle ADQ)$ は $0 \leq |\varphi| \leq \pi/2$ となる。よって、 θ から φ への変数変換を考える。そのため、線分 ON の長さに注目し、これを θ と φ の両方で表現しよう。まず、 θ で表現すると

$$\overline{ON} = l \cos \theta. \quad (21)$$

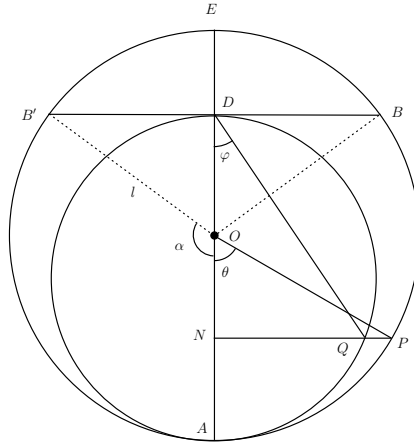


図 8: 秤動角 θ から φ への変換: Greenhill のアイデア

つぎに φ で表現すると

$$\overline{ON} = \overline{AO} - \overline{AN} = l - \overline{AQ} \sin \varphi =$$

であり, $\overline{AQ} = \overline{AD} \sin \varphi$ を代入して

$$= l - \overline{AD} \sin^2 \varphi = l - l(1 - \cos \alpha) \sin^2 \varphi \quad (22)$$

を得る。式 (21) と式 (22) が等しいことと倍角の公式を使うことにより

$$\sin \frac{\theta}{2} = k \sin \varphi \quad (23)$$

の関係をj得る。ただし, $k = \sin(\alpha/2)$ と置いた。式 (23) の変数変換により式 (20) は次のように書ける。

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{l} (1 - k^2 \sin^2 \varphi). \quad (24)$$

式 (24) より

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \quad (25)$$

を得 (+ は φ の反時計方向, - は時計方向を意味している), これより任意定数 t_0 を用いて

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0). \quad (26)$$

左辺の積分の逆函数が振幅函数 am であるので, 結局

$$\varphi(t) = \text{am}\left(\pm \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0), k\right) \quad (27)$$

を得る。これより

$$\sin \varphi(t) = \sin\left(\text{am}\left(\pm \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0), k\right)\right) = \text{sn}\left(\pm \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0), k\right) = \pm \text{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0), k\right) \quad (28)$$

となり、式 (23) より

$$\sin \frac{\theta(t)}{2} = \pm k \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0), k \right). \quad (29)$$

よって、式 (8) を得る。

ところで、式 (19) において左辺は非負であるので、この事実より $\cos \theta \geq \cos \alpha$ である。 $-\pi < \alpha \pmod{2\pi} < \pi$ であるので $|\theta \pmod{2\pi}| \leq |\alpha \pmod{2\pi}|$ となる。すなわち、秤動角 θ は α を超えることはない (位相図 6 の C_n)。

振れ角 θ の周期 T は、 φ が 0 から $\pi/2$ へ到達する時間の 4 倍であることより、式 (26) を使い

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{T}{4} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (30)$$

となる。左辺は第一種完全楕円積分であり、慣例に倣って $K(k)$ で表すと

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K(k) \quad (31)$$

となる。

注意 3 式 (29) の + の解は位相図 6 の軌跡 C_n の右半分 ($\theta \pmod{2\pi} > 0$) を、また、- の解は左半分 ($\theta \pmod{2\pi} < 0$) を表している。

2.3.3 $E = 2mgl$ の場合

$E = 2mgl$ の場合は、振り子の初期位置が不安定静止位置である下方鉛直からちょうど $\pi \pmod{2\pi}$ の位置であるか、あるいは、これだけのエネルギーを安定静止位置である下方鉛直にある振り子に与えたかのどちらかである。式 (16) に $E = 2mgl$ を代入すると

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{l} (1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad (32)$$

となり、これよりも、右辺 = 0 の場合、 $(\theta, \dot{\theta}) = ((2n + 1)\pi, 0)$, $n = 0, \pm 1, \dots$ という解が存在することが分かる。この解が下方鉛直からちょうど $\pm \pi \pmod{2\pi}$ の不安定静止位置で振り子が留まっている状態を表している。この解は、特異解の一つである。

つぎに、右辺 $\neq 0$ の場合は

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (33)$$

となり、結局

$$\int_0^\theta \sec \frac{\theta}{2} d\theta = \pm 2 \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0) \quad (34)$$

の積分を求めればよい。初等的な計算により

$$\tan \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = e^{\pm \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0)} \quad (35)$$

を得る。上式を書きなおして

$$\sin \frac{\theta(t)}{2} = \pm \tanh \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0) \quad (36)$$

となり、定理の式 (10) を得る。

注意 4 この場合の振れ角 $\theta(\text{mod } 2\pi)$ は π を超えることはない。すなわち、 $|\theta(\text{mod } 2\pi)| < \pi$ 。なぜなら、この場合式 (32) において左辺は正を考えているので、この事実より $|\sin(\theta/2)| < 1$ である。したがって、 $|\theta(\text{mod}(2\pi))| < \pi$ となる。

注意 5 式 (10) の解は、安定静止位置である下方鉛直にある振り子に $E = 2mgl$ だけのエネルギーを与えた場合に相当する。このとき、上方鉛直の位置にたどり着くには無限大の時間を必要とすることが分かる。

注意 6 式 (10) の + の解は、位相図 6 の H_n^+ の右半分、すなわち、初期値を $(\theta(t_0), \dot{\theta}(t_0)) = (2n\pi, 2\sqrt{g/l})$ としたとき無限大の時間を要して $saddle((2n+1)\pi, 0)$ へ到達する解を表している。同様に、- の解は H_n^- の左半分、すなわち、初期値を $(\theta(t_0), \dot{\theta}(t_0)) = (2n\pi, -2\sqrt{g/l})$ としたとき無限大の時間を要して $saddle((2n-1)\pi, 0)$ へ到達する解を表している。

注意 7 式 (29) において、 $k \rightarrow 1$ ($\alpha \rightarrow (2n+1)\pi, n = 0, \pm 1, \dots$) の極限とすると式 (36) を得る。

2.3.4 $E > 2mgl$ の場合

$E > 2mgl$ の場合とは、たとえば振り子の初期位置が安定静止位置である下方鉛直にあたるとすると、少なくとも不安定静止位置の上方鉛直を通り過ぎるだけのエネルギーを振り子に与えたという場合である。このとき、方程式には減衰項を与えていないので振り子は永遠に回転することになる。全エネルギーの式 (14) より

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2E}{ml^2} \left(1 - \frac{2mgl}{E} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (37)$$

が得られ、

$$\frac{d\theta}{\sqrt{1 - k_b^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{2E}{ml^2}} dt \quad (38)$$

ただし、

$$k_b^2 = \frac{2mgl}{E} \quad (39)$$

と置いた。 $E > 2mgl$ を考えているので、 $0 < k_b^2 < 1$ に注意。

ここで、再び、Greenhill に従うが現代風にアレンジして解析を行う。図 9 は点 P にある振り子が点 O を中心に回転している模様を示している。点 P から円 O の直径 AE に下ろした垂線の足を N とする。すると、振り子の回転角 θ と $\varphi = \angle AEP$ の間には $\theta = 2\varphi$ の関係があることが分かる。この関係を使い θ から φ の変数変換を施すと、式 (38) は

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_b^2 \sin^2 \varphi}} = \pm \sqrt{\frac{E}{2ml^2}} (t - t_0) \quad (40)$$

となる。これより直ちに

$$\varphi(t) = \text{am} \left(\pm \sqrt{\frac{E}{2ml^2}} (t - t_0), k_b \right) \quad (41)$$

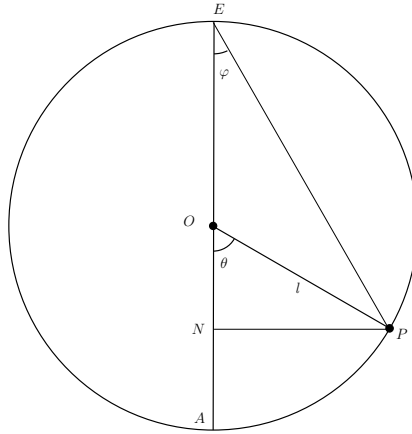


図 9: 回転角 θ から φ への変換: Greenhill のアイデア

となり

$$\sin \frac{\theta(t)}{2} = \pm \operatorname{sn} \left(\frac{1}{k_b} \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0), k_b \right) \quad (42)$$

を得る。結局、式 (9) となる。

この場合の周期は $2k_b \sqrt{l/g} K(k_b)$ となる。

注意 8 この場合、回転は永遠に続く。すなわち、回転が反時計方向なら永遠に反時計方向、時計方向なら永遠に時計方向に回転を続ける。なぜなら、式 (37) において $E > 2mgl$ であるので $\dot{\theta}^2 > 0$ が常に成り立つ。すなわち、 $\dot{\theta} > 0$ または $\dot{\theta} < 0$ を得る。前者は回転角が常に増加（反時計方向に回転）、後者は常に減少（時計方向に回転）していることを表している。

注意 9 式 (42) の + の解は位相図の R^+ 、- の解は位相図の R^- の軌跡を表している。

注意 10 式 (42) において、 $E \rightarrow 2mgl$ の極限をとると

$$\lim_{E \rightarrow 2mgl} \operatorname{sn} \left(\frac{1}{k_b} \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0), k_b \right) = \lim_{k_b \rightarrow 1} \operatorname{sn} \left(\frac{1}{k_b} \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0), k_b \right) = \tanh \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0)$$

となり、 $E = 2mgl$ の解と一致する。

注意 11 $g \rightarrow -g$, $m \rightarrow -m$, $t \rightarrow \sqrt{-1}t$ の変換

前節において、 $g \rightarrow -g$, $m \rightarrow -m$, $t \rightarrow \sqrt{-1}t$ の変数変換をしても方程式および解の形は全く変わらない。すなわち、重力の方向を逆にとり、負の質量の振り子が地球上と同じ運動をしていたら虚軸上での時間発展となることを意味している。

3 Poncelet の閉形定理

3.1 非線形振り子の運動から作られる内接円

前章までで非線形振り子の運動を扱ったが、本章にて非線形振り子の運動が形成する不定多角形について Greenhill (A.G.Greenhill, 1892) に倣って述べ、Poncelet の閉形定理へと発展させる (Armitage and W.F.Eberlein, 2006)。Greenhill 自身は、閉形定理を利用して楕円関数の加法定理などを求めた。

Poncelet の閉形定理は古典的なものであり、そのオリジナルは文献 (J.V.Poncelet, 1822) に見られる。その証明は古典的な手法 (C.G.J.Jacobi, 1823) から始まり、近年では、複素射影幾何学を持ちいた種々の取り組みがなされている (H.J.M.Bos, 1984)。閉形定理を射影幾何学を使わず、解析的な道具 (楕円関数) のみで証明することが本稿の主題である。Poncelet の閉形定理の本質は三角形の場合にあるので、 n 角形の証明は、これを発展させれば同様にできることが期待される。本稿においては、三角形と四角形の場合の証明を述べる。

図 10 は、Greenhill の作図によるものであるが、非線形振り子の運動から形成される不定三角形

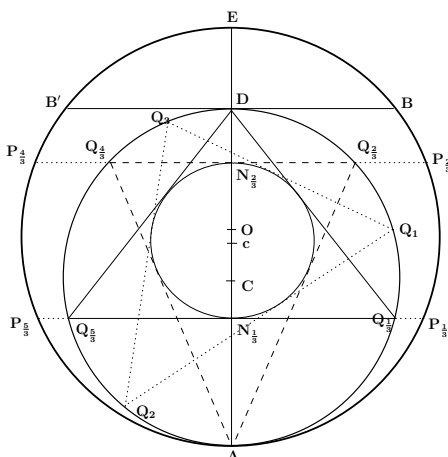


図 10: 非線形振り子の運動から形成される不定三角形: AE を直径とする円が非線形振り子の運動を表しており、振り子は円弧 BAB' 上を秤動運動している。主な記号は図 8 と同じ。

について必要な部分のみを取りだしている図である。図 8 と比べると分かりやすい。さて、振り子の秤動運動は式 (29) であるが、今初期時刻を $t_0 = 0$ として、また、 $n = \sqrt{\frac{l}{g}}$ と置くと

$$\sin \frac{\theta(t)}{2} = \pm k \operatorname{sn} \left(\frac{t}{n}, k \right) \quad (43)$$

である。振り子は $A(t_0 = 0)$ から秤動運動を式 (43) の + 方向へ開始し、最上点 B に到達してから下降を始め (式 (43) の - 方向) 再び A に戻り、この点を通り、B と対称にある最上点 B' まで上昇する。その後、下降し始め A に戻る。これが秤動 1 周期の運動であり、その周期 T は、 $T = 4nK$ と表すことができる。したがって、 $A \curvearrowright B$ ⁴、 $B \curvearrowright A$ 、 $A \curvearrowright B'$ 、 $B' \curvearrowright A$ の移動にかかる時間は nK となる。別の言い方をすると、振り子の秤動弧 BAB' は直径を AD とする円上に写像され、この円上

⁴記号 \curvearrowright は、円弧に沿っての動きを示す。

を1周するのに要する時間は $2nK$ である。 $2nK$ を3等分した点を結んだのが Poncelet の不定三角形 (Poristic Triangles) である。図の Q_1, Q_2, Q_3 のそれぞれの点は $2nK/3$ の間隔である。

たとえば, 不定三角形 $Q_{\frac{1}{3}}DQ_{\frac{5}{3}}$ は次のようにして構成することができる。まず, $P_{\frac{1}{3}}$ は, 振り子角を $\angle AOP_{\frac{1}{3}} = \theta_{P_{1/3}}$ として, $\sin \frac{\theta_{P_{1/3}}}{2} = k \operatorname{sn}(\frac{nK}{3}, k)$ から得られる点であり, $Q_{\frac{1}{3}}$ は AE に $P_{\frac{1}{3}}$ から下ろした垂線と円の交わる点である。この点より $2nK/3$ だけ + 方向に移動すると D となり, さらに $2nK/3$ だけ + 方向に移動すると $Q_{\frac{5}{3}}$ となる。不定三角形 $Q_{\frac{2}{3}}Q_{\frac{4}{3}}A$ も同様にして構成できる。

このようにして, 不定三角形が多数できるが, この不定三角形の内側にその包絡線として新たに円が形成される。

ここで, Poncelet の閉形定理を述べよう。

定理 2 (J.V.Poncelet, 1822) D_0, D_1 を4点で交わる射影平面 \mathbb{P}^2 上の相異なる2次曲線, n を3以上の整数とする。このとき $P_i P_{i+1} \in D_1^{*5}, P_{n+1} = P_1 (1 \leq i \leq n)$ をみたす D_0 上の n 個の点列が存在するならば, 任意の $Q_1 \in D_0$ に対し $Q_i Q_{i+1} \in D_1^*, Q_{n+1} = Q_1$ をみたす点列 $Q_2, \dots, Q_{n+1} \in D_0$ が存在する。

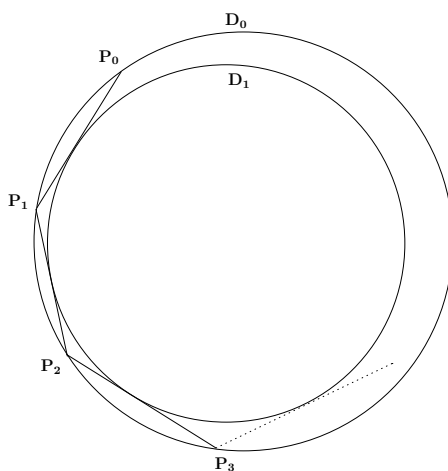


図 11: Poncelet の閉形定理 : 円と円の場合

円と円の場合について説明すると図 11 のようになる。二つの円 D_0, D_1 がある。 D_0 上の点 P_0 から D_1 へ接線を引き, この接線と D_0 との交点を P_1 とする。さらに, P_1 から D_1 へ先の接線とは異なる接線を引き, D_0 との交点を P_2 とする。以下同様の操作を続け P_3, P_4, \dots, P_n とする。もし, $P_n = P_0$ となれば, D_0 上の任意の点 Q_0 から出発して $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ を作ると $Q_n = Q_0$ となるというものである。

ここで, 閉形定理を扱う上で便利となる定義を与えておこう (M.Radić, 2003)。

定義 2 n 多角形の各辺がこの多角形に含まれる円と一点で接するとき, すなわち, n 多角形が内接する円を持つとき, n 多角形は *tangential* であると言い, 記号 \mathfrak{T} で表す。

⁵* は接線全体の集合を表す。

定義 3 n 多角形の各辺がこの多角形を取り巻く円と一点で接するとき、すなわち、 n 多角形が外接する円を持つとき、 n 多角形は *chordal* であると言い、記号 \mathcal{C} で表す。

定義 4 n 多角形が内接する円と外接する円を同時に持つとき、すなわち、 n 多角形が \mathcal{A} かつ \mathcal{C} のとき、*bicentric* であると言い、記号 \mathcal{B} で表す。

注意 12 命題「 $(\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \implies \mathcal{B}$ 」は偽である。

3.2 Poncelet の閉形定理 (三角形の場合) の楕円函数による証明

Poncelet の閉形定理の中で最も基本となる円と円で作る三角形の場合について、楕円函数を使い証明する。まず、一般性を欠くことなく、図 12 のように内側の円 C_1 (中心 o で半径 r) と外側の円 C_2 (中心 O で半径 R) がその中心間の距離 d だけ離れており、円 C_1 に外接し、円 C_2 に内接する三角形 ABC が構成できたとする。三角形 ABC と円 C_1 との接点を Q_1, Q_2, Q_3 とする。ここで、 $t_1 = AQ_1 = AQ_3, t_2 = BQ_1 = BQ_2, t_3 = CQ_2 = CQ_3$ と置くと、つぎの補題が成立する。

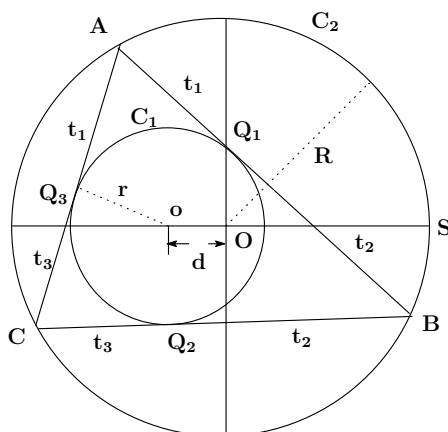


図 12: Poncelet の閉形定理：円と円で作る三角形の場合

C_2 (中心 O で半径 R) がその中心間の距離 d だけ離れており、円 C_1 に外接し、円 C_2 に内接する三角形 ABC が構成できたとする。三角形 ABC と円 C_1 との接点を Q_1, Q_2, Q_3 とする。ここで、 $t_1 = AQ_1 = AQ_3, t_2 = BQ_1 = BQ_2, t_3 = CQ_2 = CQ_3$ と置くと、つぎの補題が成立する。

補題 1 (三角形 ABC が \mathcal{B} である必要十分条件, *M. Radić, 2004*)

$$(t_1 + t_2 + t_3)r^2 = t_1 t_2 t_3, \quad (44)$$

$$t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = 4Rr + r^2. \quad (45)$$

これらの関係は三角形 ABC の面積を Heron の公式、正弦定理などを用いて初等的に証明することができる。ここで、 t_i の長さは幾何学的考察により容易に

$$t_i = \sqrt{(R + d)^2 - r^2} \operatorname{dn} u_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (46)$$

と表すことができる。ただし, $u_i = \text{am}^{-1}\varphi_i$ であり, 水平軸 OS からの線分 OA , 線分 OB , 線分 OC までのそれぞれの角を $2\varphi_1, 2\varphi_2, 2\varphi_3$ としている。記号の煩雑さを避けるため母数 k は省略してあるが, $k^2 = \frac{4Rd}{(R+d)^2 - r^2}$ ⁶ である。さて, 式 (46) を使い補題 1 を次のように書き改めよう。

補題 2

$$\frac{\text{dnu}_1 \text{dnu}_2 \text{dnu}_3}{\text{dnu}_1 + \text{dnu}_2 + \text{dnu}_3} = \frac{r^2}{(R+d)^2 - r^2}, \quad (47)$$

$$\text{dnu}_1 \text{dnu}_2 + \text{dnu}_2 \text{dnu}_3 + \text{dnu}_3 \text{dnu}_1 = \frac{4Rr + r^2}{(R+d)^2 - r^2}. \quad (48)$$

注意 13 *Greenhill* では補題 1 より

$$\frac{(t_1 + t_2)(t_2 + t_3)(t_3 + t_1)}{t_1 + t_2 + t_3} = 4Rr \quad (49)$$

を求め, さらに式 (46) を使って

$$\frac{(\text{dnu}_1 + \text{dnu}_2)(\text{dnu}_2 + \text{dnu}_3)(\text{dnu}_3 + \text{dnu}_1)}{\text{dnu}_1 + \text{dnu}_2 + \text{dnu}_3} = \frac{4Rr}{(R+d)^2 - r^2} = \frac{r}{d}k^2 \quad (50)$$

とし, 証明なしに式 (50) の左辺が $u_1 - u_2 = u_2 - u_3 = \frac{2}{3}K$ のとき, 定数になると言っている。

本稿では, 式 (47), (48) の左辺が $u_1 = u, u_2 = u - \frac{2}{3}K, u_3 = u - \frac{4}{3}K$ のとき, 任意の u について定数になることを証明する。このことにより, Poncelet の定理の三角形の場合の証明が完結する。

定理 3 $u_1 = u, u_2 = u - \frac{2}{3}K, u_3 = u - \frac{4}{3}K$ とする。このとき, 任意の u について

$$\frac{\text{dnu}_1 \text{dnu}_2 \text{dnu}_3}{\text{dnu}_1 + \text{dnu}_2 + \text{dnu}_3} = \text{const.}, \quad (51)$$

$$\text{dnu}_1 \text{dnu}_2 + \text{dnu}_2 \text{dnu}_3 + \text{dnu}_3 \text{dnu}_1 = \text{const.} \quad (52)$$

が成立する。

定理の証明の前に補題を二つ準備する。

補題 3

$$\text{dn}(u+v)\text{dn}(u-v) = \frac{\text{dn}^2 v - k^2 \text{sn}^2 u \text{cn}^2 v}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v} \quad (53)$$

[証明] dn 函数の加法定理 $\text{dn}(u+v) = \frac{\text{dn}u \text{dn}v - k^2 \text{sn}u \text{sn}v \text{cn}u \text{cn}v}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v}$ より容易に求めることができる。

[証明終]

補題 4

$$\text{cn} \frac{2}{3}K(k) = \frac{\text{dn} \frac{2}{3}K(k)}{1 + \text{dn} \frac{2}{3}K(k)} \quad (54)$$

⁶この k は前章で用いた k に相当する。すなわち, $k^2 = \frac{4Rd}{(R+d)^2 - r^2} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

[証明]cn 関数の半角の公式 $\text{cn}^2 \frac{u}{2} = \frac{\text{cnu} + \text{dnu}}{1 + \text{dnu}}$ に $u = \frac{4}{3}K$ を代入し, $\text{dn} \frac{2}{3}K = \text{dn} \frac{4}{3}K > 0$, $\text{cn} \frac{2}{3}K = -\text{cn} \frac{4}{3}K > 0$ などを使い容易に得ることができる。[証明終]

[定理 3 の証明] ここでは式 (52) について証明する。式 (51) の証明も同様にできるので省略する。さて, $\alpha = \frac{2}{3}K$ と置くと, $\text{dnu}_2 = \text{dn}(u - \alpha)$, $\text{dnu}_3 = \text{dn}(u + \alpha)$ となるので, 式 (52) の左辺は, 補題 3 を使い

$$\begin{aligned} \text{dnu}_1 \text{dnu}_2 + \text{dnu}_2 \text{dnu}_3 + \text{dnu}_3 \text{dnu}_1 &= \text{dnu} \text{dn}(u - \alpha) + \text{dn}(u - \alpha) \text{dn}(u + \alpha) + \text{dn}(u + \alpha) \text{dnu} = \\ &= \text{dnu}(\text{dn}(u - \alpha) + \text{dn}(u + \alpha)) + \text{dn}(u - \alpha) \text{dn}(u + \alpha) = \\ &= \frac{2 \text{dn} \alpha \text{dn}^2 u + \text{dn}^2 \alpha - k^2 \text{cn}^2 \alpha \text{sn}^2 u}{1 - k^2 \text{sn}^2 \alpha \text{sn}^2 u} \end{aligned} \quad (55)$$

となる。ここで,

$$\frac{2 \text{dn} \alpha \text{dn}^2 u + \text{dn}^2 \alpha - k^2 \text{cn}^2 \alpha \text{sn}^2 u}{1 - k^2 \text{sn}^2 \alpha \text{sn}^2 u} = \frac{N}{D} \quad (56)$$

とし, $N'D - ND' = 0$ が任意の u について言えれば定理が証明されたことになる。ただし, ' は u に関する微分を表す。まず, N', D' を求めると

$$N' = -4k^2 \text{dn} \alpha \text{sn} \text{cn} \text{udnu} - 2k^2 \text{cn}^2 \alpha \text{sn} \text{cn} \text{udnu} \quad (57)$$

$$D' = -2k^2 \text{sn}^2 \alpha \text{sn} \text{cn} \text{udnu} \quad (58)$$

となり, これらより

$$\begin{aligned} N'D &= -4k^2 \text{dn} \alpha \text{sn} \text{cn} \text{udnu} - 2k^2 \text{cn}^2 \alpha \text{sn} \text{cn} \text{udnu} + \\ &+ 4k^4 \text{sn}^2 \alpha \text{dn} \alpha \text{sn}^3 \text{cn} \text{udnu} + 2k^4 \text{sn}^2 \alpha \text{cn}^2 \alpha \text{sn}^3 \text{cn} \text{udnu} \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} ND' &= -4k^2 \text{sn}^2 \alpha \text{dn} \alpha \text{sn} \text{cn} \text{udnu} - 2k^2 \text{sn}^2 \alpha \text{dn}^2 \alpha \text{sn} \text{cn} \text{udnu} + \\ &+ 2k^4 \text{sn}^2 \alpha \text{cn}^2 \alpha \text{sn}^3 \text{cn} \text{udnu} \end{aligned}$$

となるが, ND' の初項に $\text{dn}^3 u = \text{dnu}(1 - k^2 \text{sn}^2 u)$ を使うと

$$\begin{aligned} ND' &= -4k^2 \text{dn} \alpha \text{sn} \text{cn} \text{udnu} + 4k^2 \text{cn}^2 \alpha \text{dn} \alpha \text{sn} \text{cn} \text{udnu} + 4k^4 \text{sn}^2 \alpha \text{dn} \alpha \text{sn}^3 \text{cn} \text{udnu} - \\ &- 2k^2 \text{sn}^2 \alpha \text{dn}^2 \alpha \text{sn} \text{cn} \text{udnu} + 2k^4 \text{sn}^2 \alpha \text{cn}^2 \alpha \text{sn}^3 \text{cn} \text{udnu} \end{aligned} \quad (60)$$

を得る。よって,

$$\begin{aligned} N'D - ND' &= -2k^2(\text{cn}^2 \alpha + 2\text{cn}^2 \alpha \text{dn} \alpha - \text{sn}^2 \alpha \text{dn}^2 \alpha) \text{sn} \text{cn} \text{udnu} = \\ &= -2k^2(\text{cn}^2 \alpha(1 + 2\text{dn} \alpha) - \text{sn}^2 \alpha \text{dn}^2 \alpha) \text{sn} \text{cn} \text{udnu} = \\ &= -2k^2(\text{cn}^2 \alpha(1 + \text{dn} \alpha)^2 - \text{dn}^2 \alpha) \text{sn} \text{cn} \text{udnu} = \quad (\text{補題 4 を使って}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (61)$$

[証明終]

注意 14 定理により, $\operatorname{dn} \frac{2}{3}K$ は, Poncelet の不定三角形を形成する R, r, d を使い, つぎのように求めることができる。

$$\operatorname{dn} \frac{2}{3}K = -1 + \sqrt{\frac{(R+d)^2 + 4Rr}{(R+d)^2 - r^2}} \quad (62)$$

さらに, Euler の関係式 $R^2 - d^2 = 2Rr$ を使い

$$\operatorname{dn} \frac{2}{3}K = -1 + \sqrt{\frac{4R^2(3R-d)}{(R+d)\{4R^2 - (R-d)^2\}}} \quad (63)$$

と, R, d のみで求めることができる。

3.3 四角形の場合

図 13 は Poncelet の不定四角形が非線形振り子の運動から形成される様子を示した図である。(図 10 の三角形を四角形に拡張したもの。) 振り子の秤動弧 BAB' は直径を AD とする円上に写像され, この円上を 1 周するのに要する時間は $2nK$ であることは三角形の場合と変わりはない。 $2nK$ を 4 等分した点を結んだのが Poncelet の不定四角形 (Poristic Quadrilaterals) である。図の Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 のそれぞれの点は $nK/2$ の間隔である。

たとえば, 不定四角形 $Q_{\frac{1}{2}}DQ_{\frac{3}{2}}A$ は次のようにして構成することができる。まず, $P_{\frac{1}{2}}$ は, 振り子角を $\angle AOP_{\frac{1}{2}} = \theta_{P_{1/2}}$ として, $\sin \frac{\theta_{P_{1/2}}}{2} = k \operatorname{sn}(\frac{nK}{2}, k)$ から得られる点であり, $Q_{\frac{1}{2}}$ は AE に $P_{\frac{1}{2}}$ から下ろした垂線と C を中心とした円の交わる点である。この点より $nK/2$ だけ + 方向に移動すると D となり, さらに $nK/2$ だけ + 方向に移動すると $Q_{\frac{3}{2}}$ さらに A となる。

このようにして, 不定四角形が多数できるが, この不定四角形の内側にその包絡線として新たに円が形成される。

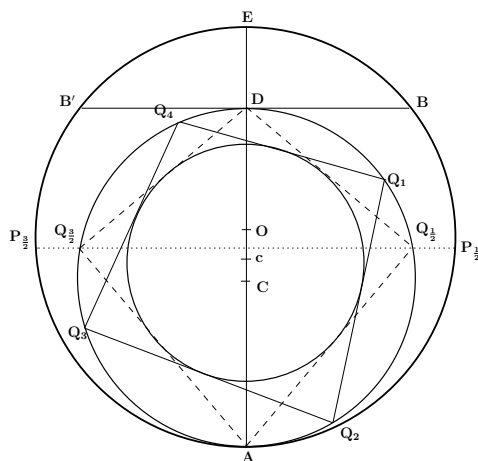


図 13: 非線形振り子の運動から形成される不定四角形: AE を直径とする円が非線形振り子の運動を表しており, 振り子は円弧 BAB' 上を秤動運動している。Greenhill の作図によるものであるが, 非線形振り子の運動から形成される不定四角形について必要な部分のみを取りだした。

三角形(図 12)の場合と同様に, 一般性を欠くことなく, 図 14 のように内側の円 C_1 (中心 o で半径 r) と外側の円 C_2 (中心 O で半径 R) がその中心間の距離 d だけ離れており, 円 C_1 に外接し, 円 C_2 に内接する四角形 $ABCD$ が構成できたとする。四角形 $ABCD$ と円 C_1 との接点を Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 とする。ここで, $t_1 = AQ_1 = AQ_4, t_2 = BQ_1 = BQ_2, t_3 = CQ_2 = CQ_3, t_4 = DQ_3 = DQ_4$ と置くと, つぎの補題が成立する。以下記号の簡単化のため, 四角形 $ABCD$ を $\square ABCD$ と書くことにする。

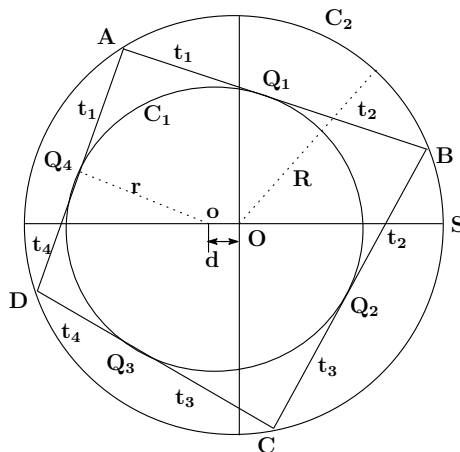


図 14: Poncelet の閉形定理 : 円と円で作る四角形の場合

補題 5 $\square ABCD$ is $\mathfrak{B} \iff (t_1 t_3 = t_2 t_4 = r^2) \wedge (\square ABCD$ is $\mathfrak{T})$.

補題 5 の証明の前に, 四角形の面積に関するよく知られた事実を述べる。

事実 1 $\square ABCD$ が \mathfrak{B} であるとき, その内接する円の半径を r とすると

$$rs = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \sqrt{abcd}, \quad (64)$$

ここで, $a = t_1 + t_2, b = t_2 + t_3, c = t_3 + t_4, d = t_4 + t_1, s = \frac{a+b+c+d}{2} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$.

[補題 5 の証明] (必要性) まず, $\square ABCD$ は \mathfrak{B} であるので, 当然 \mathfrak{T} である。そのとき, つぎの関係があることを示そう。

$$r^2(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) = (t_1 + t_2)t_3 t_4 + (t_3 + t_4)t_1 t_2 \quad (65)$$

$\square ABCD$ の各頂点の角度を 2 等分して, $\angle A/2 = \beta_1, \angle B/2 = \beta_2, \angle C/2 = \beta_3, \angle D/2 = \beta_4$ と表すと, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = \pi$ であるので $\tan(\beta_1 + \beta_2) = -\tan(\beta_3 + \beta_4)$ となる。加法定理より, $\frac{\tan \beta_1 + \tan \beta_2}{1 - \tan \beta_1 \tan \beta_2} = -\frac{\tan \beta_3 + \tan \beta_4}{1 - \tan \beta_3 \tan \beta_4}$ を得るが, $\tan \beta_i = \frac{r}{t_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) を代入し, $\frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2 - r^2} = -\frac{t_3 + t_4}{t_3 t_4 - r^2}$ を得る。これより分母を払えば式 (65) となる。
一方, 式 (64) より

$$r^2(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)^2 = (t_1 + t_2)(t_2 + t_3)(t_3 + t_4)(t_4 + t_1) \quad (66)$$

の関係も成立する。

以上求めた2つの関係式 (65) と (66) より

$$(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)\{(t_1 + t_2)t_3t_4 + (t_3 + t_4)t_1t_2\} = (t_1 + t_2)(t_2 + t_3)(t_3 + t_4)(t_4 + t_1)$$

を得るが、この式を整理して

$$(t_1t_3 - t_2t_4)^2 = 0 \quad (67)$$

を得る。また、式 (65) 右辺は

$$(t_1 + t_2)t_3t_4 + (t_3 + t_4)t_1t_2 = t_1t_3(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)$$

となるので

$$r^2(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) = t_1t_3(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) \quad (68)$$

すなわち、 $t_1t_3 = r^2$ となり、式 (67) と合わせて $t_1t_3 = t_2t_4 = r^2$ を得る。したがって、 \mathfrak{T} の部分は冗長であるが、必要性の証明がなされたことになる。

(十分性) 事実 1 より $(t_1t_3 = t_2t_4 = r^2) \wedge (\square ABCD \text{ is } \mathfrak{T})$ ならば

$$f = r^2s^2 - (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) = 0$$

を言えばよい。条件の \mathfrak{T} を使うと、 $a = t_1 + t_2, b = t_2 + t_3, c = t_3 + t_4, d = t_4 + t_1$ だから

$$f = r^2(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)^2 - (t_1 + t_2)(t_2 + t_3)(t_3 + t_4)(t_4 + t_1)$$

ここで $t_1t_3 = t_2t_4 = r^2$ より $t_3 = r^2/t_1, t_4 = r^2/t_2$ を代入すると

$$= r^2 \left(t_1 + t_2 + \frac{r^2}{t_1} + \frac{r^2}{t_2} \right)^2 - (t_1 + t_2) \left(t_2 + \frac{r^2}{t_1} \right) \left(\frac{r^2}{t_1} + \frac{r^2}{t_2} \right) \left(\frac{r^2}{t_2} + t_1 \right) = 0$$

となり、十分性の証明もなされた。[証明終]

ここで、式 (46) $t_i = \sqrt{(R+d)^2 - r^2} \operatorname{dn}u_i$ を使い補題 5 を下記のように書き直そう。

$$\text{補題 6 } \square ABCD \text{ is } \mathfrak{B} \iff \left(\operatorname{dn}u_1 \operatorname{dn}u_3 = \operatorname{dn}u_2 \operatorname{dn}u_4 = \frac{r^2}{(R+d)^2 - r^2} \right) \wedge (\square ABCD \text{ is } \mathfrak{T}).$$

よって、 $u_1 = u, u_2 = u_1 + \frac{K}{2}, u_3 = u_1 + K, u_4 = u_1 + \frac{3}{2}K$ のとき、任意の u について

$$\operatorname{dn}u_1 \operatorname{dn}u_3 = \operatorname{dn}u_2 \operatorname{dn}u_4 = \frac{r^2}{(R+d)^2 - r^2}$$

が成り立つことを言えば、Poncelet の定理の四角形の場合の証明が完結する。

定理 4 $u_1 = u, u_2 = u_1 + \frac{K}{2}, u_3 = u_1 + K, u_4 = u_1 + \frac{3}{2}K$ とする。このとき、任意の u について

$$\operatorname{dn}u_1 \operatorname{dn}u_3 = \operatorname{dn}u_2 \operatorname{dn}u_4 = \frac{r^2}{(R+d)^2 - r^2} \quad (69)$$

が成立する。

[証明] $u_1 = u, u_3 = u_1 + K$ を使うと, 式 (69) の第一等式は

$$\operatorname{dn}u \operatorname{dn}(u + K) = \frac{r^2}{(R + d)^2 - r^2} \quad (70)$$

となり, これを証明すればよい。ここで, $\operatorname{dn}(u + K, k) = \frac{k'}{\operatorname{dn}(u, k)}, k'^2 = 1 - k^2$ を使うと, 式 (70) の (左辺-右辺) は

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}u \operatorname{dn}(u + K) - \frac{r^2}{(R + d)^2 - r^2} &= k' - \frac{r^2}{(R + d)^2 - r^2} = \\ &= \sqrt{\frac{(R - d)^2 - r^2}{(R + d)^2 - r^2}} - \frac{r^2}{(R + d)^2 - r^2}. \end{aligned}$$

ここで, Fuss の関係式⁷を使うと, 上式が零となることが分かる。したがって, 式 (70) が任意の u で成立することが証明された。

式 (69) の第二等式も $v = u + K/2$ と置くことにより

$$\operatorname{dn}v \operatorname{dn}(v + K) = \frac{r^2}{(R + d)^2 - r^2}, \quad (71)$$

となり, 第一等式の場合と全く同じように証明できる。[証明終]

注意 15 Fuss の関係式より

$$k' = \operatorname{dn}K = \left(\frac{R - d}{R + d}\right)^2 \quad (72)$$

を得る。

参考文献

1. K.T.Alligood, T.D.Sauer, and J.A.Yorke, *An Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1997.
2. J.V.Armitage and W.F.Eberlein, *Elliptic Fuctions*, Cambridge University Press, 2006.
3. A.G.Greenhill, *The Application of Elliptic Fuctions*, London Macmillan and CO., 1892.
4. H.J.M.Bos, 'The Closure Theorem of Poncelet,' *Rendiconti del seminario matematico e fisico di Milano* **54**, 145-158, 1984.
5. G.Duffing, *Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz*, F. Viewegu. Sohn: Braunschweig, 1918.
6. W.D.MacMillan, *Theoretical Mechanics: Statics and the Dynamics of a Particle*, McGraw Hill, New York, 1927.
7. C.G.J.Jacobi, 'Über die Anwendung der elliptischen Transcendentten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometries,' *J.rein angew. Math.*3, 376-387, 1823, Reprinted in *Gesammelte Werke*, **1**, Providence, RI: Amer.Math.Soc, 278-293, 1969.

⁷Fuss の関係式: 初等数学の偉大なる 100 問題の一つで, \mathfrak{B} である \square の内接円半径 r , 外接円半径 R , 二つの円の中心間距離 d の間で成り立つ関係を表し, $(R^2 - d^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2)$ と書ける。

8. B.T.Nohara and A.Arimoto, 'Solution of the Duffing Equation with a higher order nonlinear term,' Theoretical and Applied Mechanics Japan, **59**, 2011. and Proc. Korea-Japan Joint Workshop on Dynamical Systems and Related Topics, 2010.
9. J.V.Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures: ouvrage utile à qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain*, **1-2**, 2nd ed. Paris: Gauthier-Villars, 1865-66. (first ed. Bachelier, Paris, 1822)
10. M.Radić, 'Some Relations Concerning Triangles and Bicentric Quadrilaterals in Connection with Poncelet's Closure Theorem,' Math. Maced., **1**, 35-58, 2003.
11. M.Radić, 'Extreme Areas of Triangles in Poncelet's Closure Theorem,' Forum Geometricorum, **4**, 23-26, 2004.
12. S.H.Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Westview Press, 1994.
13. E.T.Whittaker and G.N.Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, 1902.
14. 野原勉, 有本彰雄, '一般化 Duffing 方程式の解の構成について,' 東京都市大学共通教育センター紀要, **3**, 47-62, 2010.